

Title	Harrノmeasure二就イテ
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 148 p.339-p.348
Issue Date	1937-12-07
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74583
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

657. Haar's measure = 就イテ

角 谷 静 夫 (阪大)

Haar's measure が unique. デアルカドウカト云フ問題ハ J. v. Neumann 及ビ A. Weil = ヨツテ論セラレタ。コノ = unique デアルトイフノハ 勿論 constant factor ヲ除イテ unique デアルコトヲ指スノデアル。

最初 J. v. Neumann ハ compact + group = 對シテソレガ unique デアルコトヲ証明シ、且ツ left-invariant + measure ト right-invariant + measure トが一致スルコトモ示シタ。(Compositio Math., vol. 1, 1934)

其ノ後 J. v. Neumann ハ locally compact, separable + group ノ場合 = ∞ uniqueness ノ定理が成立スルコトヲ証明シタ。(Recueil, Math., 1(43), 1936)。

コノ時ハ left-invariant + measure ト right-

invariant + measure トハ必ずしも一致シナイノ
デアル。

又一方コレト相反 = A. Weil ハ一般ノ *locally bi-*
compact + group = 對シテ \in Haar *measure*
が定義シ得ラレ且ツソレが *unique* デアルコトヲ証明シ得
タト報ジテキル。(C.R.t. 202, 1936) A. Weil ノ証明
ハ J.V. Neumann ノ証明トソノ方法が全然異ツテアルト云
フコトデアルが未ダ発表サレナイノデ如何ナル方法ニヨルノ
コトカラナイ。(コレハ恐ラク近イウチニ出ルコトニナツテ
キル *Memorial des Sciences Math.* ノ一冊デアル
A. Weil ノ著書中ニ書カレルニト思ハレル)

次ニ述べヨウトスル Haar *measure* ノ *unique-*
ness ノ証明ハ J.V. Neumann ノ証明ヲ簡單ニシタモノデ
アル。

V. Neumann ハ *left-invariant + measure* ノ
uniqueness ノ証明 = *right-zero-invariance*
ナル概念ヲ用ヒテキルが、コレハ非常ニ面白い又重要ナコ
トデアルケレドモ必要ノナイコトデアル。コレハ V. Neu-
mann が *left-invariant + measure* ノミヲ考
ヘテキタカラデ *right-invariant + measure* ヲ
モ同時ニ考ヘレバ証明が簡單トナルノデアル。即チ V. Neu-
mann ハ *double integral* ヲ考ヘルトキニ度トモ
同ジ *measure* (*left-invariant + measure*)
ヲ用ヒテキルが、コレハ必要ノナイコトデ、第二ノ *integral*

トシテ *right-invariant + measure* = ヨル
integral ヲトレバ議論が簡単トナルノデアアル。

Group ノ *measure* ヲ考ヘル代リ = , 一般 = 空間
 S ト S ヲ S 自身へ *homeomorphic* = 寫像スル変換 σ ,
作ル *group* G が興ヘラレタトキ G = 属スル変換 σ =
對シテ *invariant* + S ノ *measure* ヲ問題トスルナラ
バ、コノコトハ明瞭トナルノデアアル。

即チカ > ル *measure* , *uniqueness* ヲ証明シヨウトス
ル時 = ハ *product-space* $S \times G$ 中ノ *integral* ヲ
考ヘルコト = ナルノデアアルガコノ時 G ノ *measure* トシテ
right-invariant + モノヲ取レバヨイト云フコトハ明
カデアアル。

uniqueness ノ 定理ノ 証明

証明ハニツノ部分 = 分レル。

(I) *Group* G ト μ ノ *left-invariant + measure* μ が
興ヘラレタ時 G ノ *Borel* 集合 E が任意、 $a \in G$ = 對シテ $\mu(E \dot{+} aE - E \cdot aE) = 0$ ヲ満足スレバ $\mu(E) = 0$ 又ハ $\mu(G - E)$ トナル。コノ
性質ヲ G が *left-ergodic* デアルトナヅテアル。

(II) *locally compact, separable + group* G が *left-ergodic* デアレバ G ノ *left-invariant + measure* ハ *unique* デアル。

(I) ノ 証明

E ノ *characteristic function* ヲ $\varphi(x)$ トセヨ。
 $\varphi(ax)$ ハ $a^{-1}E$ ノ *characteristic function* デアル
カラ $|\varphi(ax) - \varphi(x)|$ ハ $E \dot{+} a^{-1}E - E \cdot a^{-1}E$ ノ *characteris-*
tic function トナル。然ルニ此集合ハ μ -*measure* が 0 デ

アルカラ

$$\int |\varphi(ax) - \varphi(x)| d\mu(x) = 0$$

デアル。恒シ積分ハ $x = \text{ツキ}$ 、 μ -measure = 開シテ G 全体 = ホドコスモ、トスル。コノ関係ハ任意ノ $a \in G =$ 對シテ 成立スルカラ任意ノ G ノ right-invariant + measure $\lambda =$ 對シテ

$$\iint |\varphi(ax) - \varphi(x)| d\mu(x) d\lambda(a) = 0$$

コノ $\int \dots d\lambda(a)$ 、意味モ前ト同様デアル。E が Borel 集合デアレコトヨリ $|\varphi(ax) - \varphi(x)|$ ハ x, a ノ二変数ノ函数ト考ヘテ measurable トナルカラ Fubiniノ定理が應用デキテ

$$\int |\varphi(ax) - \varphi(x)| d\lambda(a) = 0 \quad (1)$$

ガ almost all $x =$ 對シテ成立スル。即チ μ -measure が 0 + 集合 M が定マリ $x \in G - M =$ 對シテ (1) が成立スルデアル。ヨツテ λ -measure が 0 + 集合 E_x (コレハ $x =$ depend スル!) が定マリ $a \in G - E_x$ + ルトキ

$$\varphi(ax) = \varphi(x) \quad (2)$$

トナル。同様ニ任意ノ $y \in G - M =$ 對シテ λ -measure が 0 + 集合 E_y が定マリ $b \in G - E_y$ + ルトキ

$$\varphi(by) = \varphi(y) \quad (3)$$

トナル。ヨツテ若シ適當ニ a, b ヲ取ツテ $ax = by$ ナラシメルコトが出来レバ (2), (3) ヨリ $\varphi(x) = \varphi(y)$ トナリ、 x, y

が $G-M$, 任意ノ点 μ アルコトヨリ

$$\varphi(x) = \text{const. } x \in G-M, \quad \mu(M) = 0$$

即チ $\mu(E) = 0$ スハ $\mu(G-E) = 0$ トナツテ (I) ノ証明
が出来ルノデアアル。

ヨツテ問題ハカナル a, b ヲ撰ブコト = 歸スルノデアアル
ガコレハ入ガ *right-invariant* ナルコトヨリ可能デア
アル。何トナレバ a ガ $G-E_x$ ヲウゴフトキ $a \cdot x \in G-E_x \cdot X$
ヲウゴキ、同様ニ b ガ $G-E_y$ ヲウゴフトキ $b \cdot y \in G-E_y \cdot Y$
ヲウゴキ、而モ $\lambda(E_x \cdot X) = \lambda(E_x) = 0, \lambda(E_y \cdot Y) = \lambda(E_y)$
 $= 0$ ナルコトヨリ $(G-E_x \cdot X) \cdot (G-E_y \cdot Y) = G-E_x \cdot X - E_y \cdot Y \neq \Lambda$
(Λ : 空集合) トナルノデアアル。

(II) ノ証明

G 7 *locally compact, separable + group*
トセヨ。

G , *left-invariant + measure* ガ *unique*
デナイトスレバ G , ニツノ *left-invariant + mea-*
sure μ_1, μ_2 トニツノ Borel 集合 E_1, E_2 ガ存在シ
テ

$$\mu_1(E_1), \mu_2(E_1), \mu_1(E_2), \mu_2(E_2) > 0$$

$$\frac{\mu_1(E_1)}{\mu_2(E_1)} > \frac{\mu_1(E_2)}{\mu_2(E_2)}$$

トナル。

$$\frac{\mu_1(E_1)}{\mu_2(E_1)} > \alpha > \frac{\mu_1(E_2)}{\mu_2(E_2)}$$

＋ μ real number α をとり

$$\mu(E) = \mu_1(E) - \alpha \mu_2(E)$$

ヲ考へル。 $\mu(E)$ は total additive + set function
デコレハ任意ノ compact + 範圍デ bounded varia-
tion デアル。 ヨツテ任意ノ open set デノ closure
ガ compact + ϵ ノ O フトレバ O ハニツノ Borel 集合
 $P, N =$ 分レテ ($O = P + N, P \cdot N = \Lambda$),

任意ノ $E \subset P$ ナル Borel 集合 $E =$ 対シテハ $\mu(E) \geq 0$,

任意ノ $E \subset N$ ナル Borel 集合 $E =$ 対シテハ $\mu(E) \leq 0$

トナル。 先ガコレヲ証明シヨウ。

$O =$ 於テ μ ハ bounded variation デアルカラ
 $E \subset O$ ナルアラユル Borel 集合 $E =$ 対スル $\mu(O)$ ノ 上限 K
ハ有限デアル。 且ツ上限ノ性質ヨリ $E_n \subset O, \mu(E_n) > K - \frac{1}{2^n}$
ナル Borel 集合 E_n が存在スル,

$$P = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} E_n} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E_n,$$

$N = O - P$ トオケバ $O = P + N$ が求ムル分解デアル。 何ト
ナレバ先ガ P, N が Borel 集合ヲ $P \cdot N = \Lambda$ ナルコトハ明
カデアル。

次ニ $\mu(P) = K$ トナルコトヲ証明シヨウ。 コレガ証明
出来レバ任意ノ $E \subset P$ ナル Borel 集合ニ対シテ $\mu(E) \geq 0$,
任意ノ $E \subset N$ ナル Borel 集合ニ対シテ $\mu(E) \leq 0$ トナ

ルコトハ明カデアル。實際アル $E \subset P$ = 對シテ $\mu(E) < 0$ ト
 +レバ $\mu(P-E) = \mu(P) - \mu(E) > K$ トナリ又 $E \subset N$
 = 對シテ $\mu(E) > 0$ トナレバ

$$\mu(P+E) = \mu(P) + \mu(E) > K$$

トナリ何レモ矛盾 = 達スル。

ヨツテ証明ハ $\mu(P) = K$ ナルコトノ証明 = 歸スル, 先ヅ
 任意ノ Borel set $A, B \subset O$ = 對シテ

$$\begin{aligned}\mu(A+B) &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cdot B) \\ &\geq \mu(A) + \mu(B) - K\end{aligned}$$

更 = 一般 = 任意ノ有限個ノ Borel set $A_i \subset O$ ($i=1, 2, \dots$
 \dots, n) = 對シテ

$$\mu\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - (n-1)K$$

ヨツテ

$$\begin{aligned}\mu\left(\sum_{n=m}^{m+p} E_n\right) &\geq \sum_{n=m}^{m+p} \mu(E_n) - p \cdot K \\ &> \sum_{n=m}^{m+p} \left(K - \frac{1}{2^n}\right) - p \cdot K \\ &= K - \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m+p}}\right) \\ &> K - \frac{1}{2^{m-1}}\end{aligned}$$

μ ハ total additive ナルカヲ

$$K \geq \mu\left(\sum_{n=m}^{\infty} E_n\right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu\left(\sum_{n=m}^{m+p} E_n\right)$$

$$\geq K - \frac{1}{2^{m-1}}$$

ヨツテ再ビ μ が *total additive* ナルコトヲ用フレバ

$$\begin{aligned} K \geq \mu(P) &= \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E_n\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\sum_{n=m}^{\infty} E_n\right) \geq K \end{aligned}$$

$$\therefore \mu(P) = K$$

コノ分解ヲ用ヒテ更ニ G 全体ヲ同様ノ性質ヲモツタニツノ
Borel 集合 P ト N トニ分解スルコトヲ考ヘル。

假定ニヨリ G は *locally compact, separable* ナ
アルカラ *closure* が *compact* ナアル如キ *open set*
 O_i ($i=1, 2, \dots$) ヲ取り $G = \sum_{i=1}^{\infty} O_i$ トナシメルコトが
出来ル。(O_i, O_j , $i \neq j$ ハ共通点ヲ持ツテモヨイ!)
コノ各々ノ O_i ハ上記ノ如ク *Positive part* P_i ト *neg-*
ative part N_i トニワカレル。

$$O_i = P_i + N_i, \quad P_i \cdot N_i = \Lambda.$$

シカモ任意ノ i, j ニ對シテ $\mu(P_i \cdot N_j) = 0$ トナル。コレ
ハ $P_i \cdot N_j \subset P_i$ ナルコトヨリ $\mu(P_i \cdot N_j) \geq 0$,
 $P_i \cdot N_j \subset N_j$ ナルコトヨリ $\mu(P_i \cdot N_j) \leq 0$ トナルコトヲ考
ヘレバ明カデアアル。コノ P_i = ヨツテ

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} P_i, \quad N = G - P$$

トオケバ $G = P + N$ が求ムル分解ナルコトハ明カデアアル。

即ち P, N の明か = Borel 集合で $P \cdot N = \Lambda$, 且つ任意
 $E \subset P$ 上の Borel 集合 E に対して $\mu(E) \geq 0$,
 $E \subset N$ 上の Borel 集合 E に対して $\mu(E) \leq 0$ となること
 も明かである。

此の如く G が P と N と = 分解スルところから, P が (I)
 の条件ヲ満足シテキル。即ち任意の $a \in G$ に対して

$$\mu(P \dot{+} aP - P \cdot aP) = 0$$

となることキル。何となれば

$$\begin{aligned} P \dot{+} aP - P \cdot aP &= (P - P \cdot aP) + (aP - P \cdot aP) \\ &= P \cdot aN + aP \cdot N \end{aligned}$$

= テ $\mu(P \cdot aN)$ は $P \cdot aN \subset P$ となることヨリ ≥ 0 ,

$P \cdot aN \subset aN$ = テ μ が *left invariant* となることヨリ
 ≤ 0 となるから $\mu(P \cdot aN) = 0$ となる。

又同様 = $\mu(aP \cdot N) = 0$ となることも示され, 且つ
 $P \cdot aN, aP \cdot N$ の共通点ヲ持タナイカラ

$$\mu(P \dot{+} aP - P \cdot aP) = \mu(P \cdot aN) + \mu(aP \cdot N) = 0$$

となるのである。

ヨツテ、 G が *ergodic* たることノ假定ヨリ (コレハ
 I で証明シタこと) $\mu(P) = 0$ 又ハ

$$\mu(G - P) = \mu(N) = 0$$

となればならぬ。

然ルニ他方 μ の作り方ヨリ $\mu(E_1) > 0, \mu(E_2) < 0$
 であるから $\mu(P) > 0, \mu(N) > 0$ となればならぬ。
 コレハ矛盾であるから G の *left-invariant + measure*

ハ *unique* デナケレバナラス。(証明終)